

## 講義ノート

フラクタル世界の酔っぱらいは非整数次元を知ることができるか？

東大・教養 服部久美子

## 1 Introduction

もう20数年前になります。家に明治（森永かもしれない）の粉ミルクの缶があって、それにはメイドの制服を着た女の子が粉ミルクの缶を持っている絵がついていました。女の子が手にしている缶には、また缶を持った女の子の絵がついていて…と続いていくのです。幼かった私はその絵を見るたびに、引き込まれそうな不思議な気持ちを味わったものです。

数学の世界にも、この粉ミルクの缶の絵を思わせる、一連の不思議な図形があります。“フラクタル”とよばれるそれらの図形は、最近脚光を浴び、豊富な研究課題を提供する新しい分野となっています([1])。下の二つの図形がフラクタルの例です。

樹や河などの形もフラクタルとよべれます。樹の一本の枝は、小さいながらそれ自体一本の樹と同じ様な形をしています。図1-1はそのひとつのモデルになっています。また、図1-2の曲線も、一部を拡大すると更に細かい構造が見えてきて、元の曲線と全く同じに見えます。海岸線も同様に、拡大してみてもいくらでも細かい同じようなぎざぎざがあるので、形を見ただけでは、縮尺100万分の1なのか、1万分の1なのかは区別できません。これもフラクタルの仲間に入ります。フラクタルは、このように何らかの意味で自己相似性をもつものを指す非常に広い概念です。そして、神秘的な雰囲気を持ちますが、決して“不自然な”図形ではありません。私達の身の回りに多くの例がみられますし、またミクロの世界でも臨界現象と関連して現れます([2])。更にフラクタルは“次元とは何か”という難問に対する手がかりを私達に与えてくれます。以下ではまず、私達がここで扱う対象を規定し、今の段階ではまだナンセンスに聞こえるかも知れない“次元とは何か”という問の意味するところを明らかにしていきましょう。

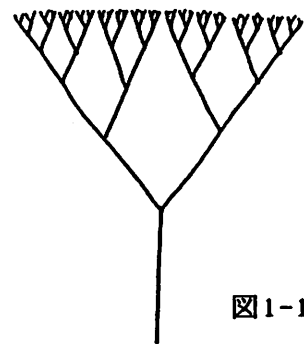


図1-1

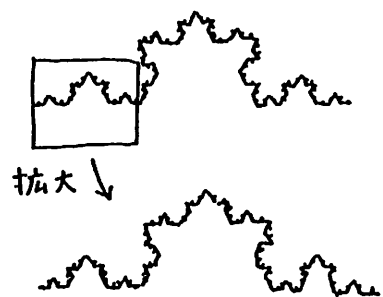


図1-2

## 1-1 フラクタル格子

“フラクタル”と呼ばれているもの全体を、数学的に定義することは広すぎて不可能でしょう。ここでは、そのうちの一つのグループを扱います。

(論文によって、扱う対象の違いのためにフラクタルの定義が異なることもあるので注意。) まずこのグループに属するいくつかの例をお見せしましょう。

1) 2次元シェルピンスキー・ガスケット (Sierpinski Gasket)

一辺の長さ1の正三角形 $F_0$ を用意.

$F_0$ を3個積んで $F_1$ を作る.

$F_0$ から $F_1$ を作ったのと同様にして,  $F_1$ から $F_2$ を作る.

この操作を無限回繰り返した結果得られる図形 $F_\infty$ が, 2次元シェルピンスキー・ガスケット (図1-3).

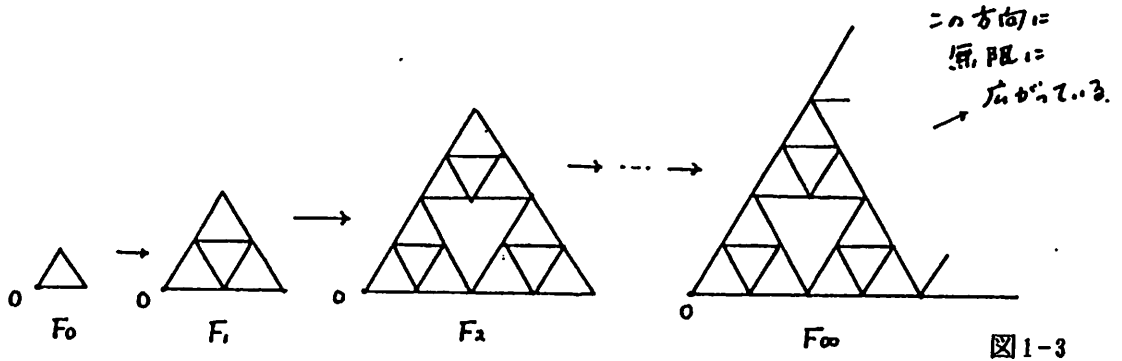


図1-3

以後の便宜のため, フラクタルを構成するとき, 常に一つの端点 (図のO) が手元にあるとします. この様に, 単位となる図形 $F_0$ をいくつか積んで $F_1$ を作り, これと同様の操作を無限回繰り返すことにより色々なフラクタルを作ることができます.

2) コッホ曲線 (Koch curve)

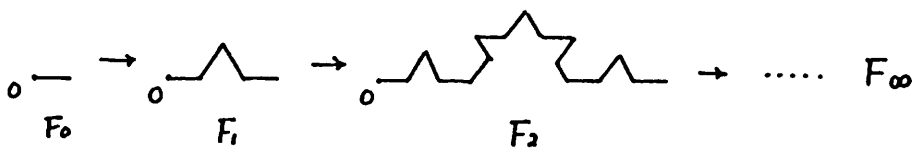


図1-4

3) 枝分かれコッホ曲線 (Branched Koch curve)

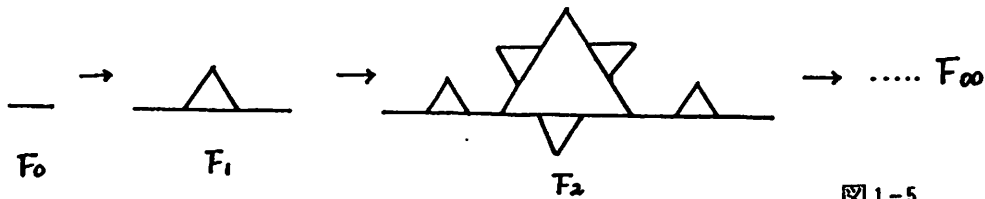


図1-5

4) 3次元 (d次元) シェルピンスキー・ガスケット

$F_0$ は一辺が1の正四面体 (d-simplex).

$F_1$ は $F_0$ を4個( $d+1$ 個)積んで作ったもの。 $F_0$ を2倍に拡大して、各頂点の所に元の大きさの $F_0$ をはめこめば、 $F_1$ が得られます(図1-6)。

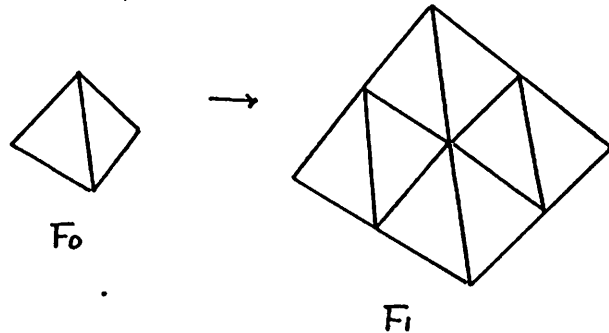


図1-6

\* ここでいう $d$ -simplexは、 $d+1$ 個の頂点をもち、各頂点は他の $d$ 個のどの頂点とも同じ長さの辺で結ばれている図形の意味。

これらの図形( $F_\infty$ )は、 $F_1$ の内部構造を消してしまって(つまり1)の例では $F_\infty$ 中の全ての $F_1$ を一辺2の正三角形で置き換える)、適当に縮小すると(1)では、 $1/2$ )もとの図形に戻ります(図1-7)。この意味で、1)-4)の図形は自己相似性を持っているといい、フラクタルの仲間に入ります。

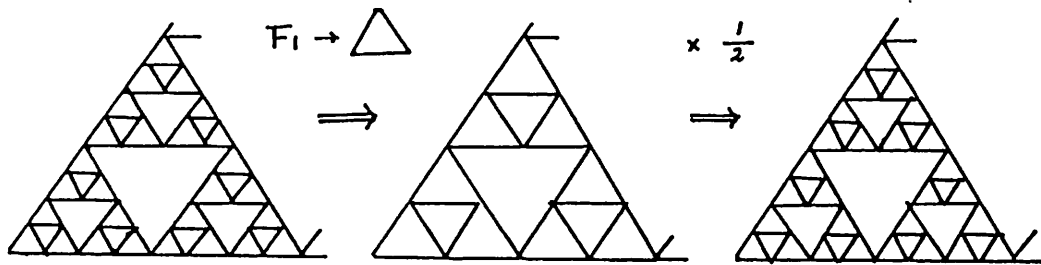


図1-7

ところで、図1-1, 図1-2の例は、全体の大きさは有限で、内側に限りなく細かい構造を持つフラクタルでしたが、1)-4)の例では最小単位( $F_0$ )が存在し、外側に無限に広がる図形を作っています。後者の種類のフラクタルを、フラクタル格子と呼ぶことにし、以後専らこれを扱います。 $d$ 次元正方格子もこの意味でフラクタル格子とよぶことができます。

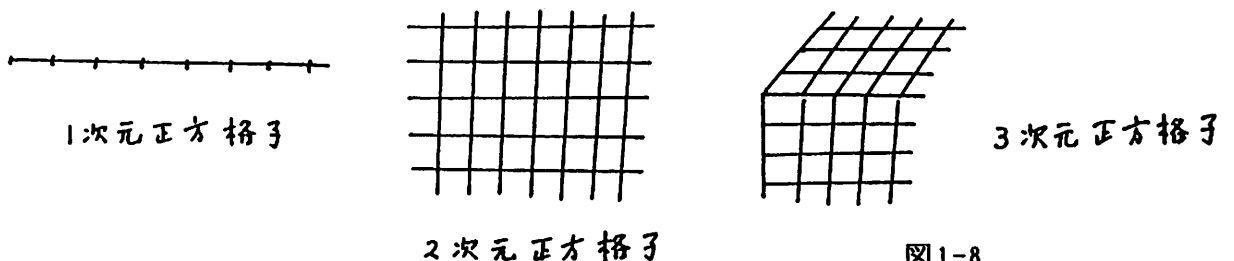


図1-8

1-2 フラクタル次元

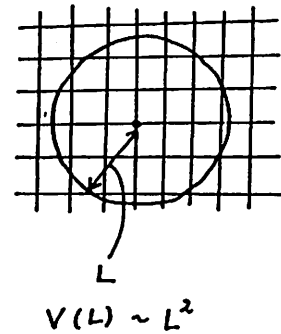
フラクタル格子上的の任意の頂点（辺同志が交わる点）から距離L（普通の意味の Euclid 距離）内にある頂点の数をV(L)とすると、Lが十分大きいところで、

$$V(L) \sim L^{\bar{d}} \tag{1.1}$$

の様なべき乗の振舞いを示します。（図1-9）この指数 $\bar{d}$ をフラクタル次元と呼びます。（上のようなべき乗の振舞いを示し、 $\bar{d}$ が定義できる、というところに自己相似性が効いている。）

正方格子の場合は、 $\bar{d} = d$ ですが、一般に $\bar{d}$ は非整数値をとります。

2-dim Sierpinski Gasket	$\bar{d} = \log 3 / \log 2 = 1.585$
3-dim Sierpinski Gasket	$\bar{d} = \log 4 / \log 2 = 2$
Koch curve	$\bar{d} = \log 4 / \log 3 = 1.261$
Branched Koch curve	$\bar{d} = \log 5 / \log 3 = 1.465$



\* (1.1)の $\sim$ はLが十分大きいところで

$$AL^{\bar{d}} < V(L) < BL^{\bar{d}}$$

となるような正の数A, Bが存在するという意味。

図1-9

2次元 Sierpinski Gasket は、平面内の図形ですが、遠くへいくほど大きな穴が空いているため $\bar{d}$ は2より小さくなります。一方、Koch curveは直線を折り曲げて作ったものですが、形が直線より複雑なため $\bar{d}$ は1より大きくなります。フラクタル次元は、フラクタルをユークリッド空間に埋め込んで外から眺めたとき、その形の複雑さを表す量と言ってよいでしょう。

1-3 スペクトル次元

フラクタル次元が、外から眺めたときのフラクタルの形を記述するものであるならば、フラクタル上に住んでいる人にとって、世界はどのように見えるのでしょうか？ 彼自身もフラクタルの非整数次元的性質を知ることができるのでしょうか？ フラクタル上で物理現象を観察すると、スペクトル次元という、フラクタル次元とは別の次元が現れます。これを通して、フラクタル上の住人は自分の世界のフラクタル的性質を知ることができます。

時刻0で、端点0（構成のとき手元に保っておいたもの）だけを100度に熱し、

他の点は総て0度であるとして熱拡散を考えます。（厳密に言えば、頂点上だけを熱がジャンプしながら伝わっていく、単純化されたモデルですが。）時刻  $t$ , 場所  $x$  における温度を  $p(x,t)$  として,  $t$  が十分大きいところでの振舞いに注目しましょう。  $d$  次元正方格子の場合,

$$p(0,t) \sim t^{-d/2} \quad (1.2)$$

となります。（ $\sim$ は前と同じ意味）（これは連続空間における熱拡散方程式の解と同じ振舞い。この様な、空間の大域的性質に関するものは、連続でも、格子にしても変わらないと思われる。）

2次元正方格子ならば,

$$p(0,t) \sim t^{-1}$$

となります。ところが, 2-dim Sierpinski Gasketの場合は,

$$p(0,t) \sim t^{-0.68}$$

となり, 平面内にあるにもかかわらず指数が  $-1$  からずれます。この指数から一般にスペクトル次元  $\tilde{d}$  を,

$$p(0,t) \sim t^{-\tilde{d}/2} \quad (1.3)$$

で定義します。2次元 Sierpinski Gasketは,  $\tilde{d} = 1.37$  です。スペクトル次元も, 一般に非整数値をとります。

スペクトル次元とフラクタル次元の違いがはっきりするのが, Koch curveの場合です。  $\bar{d} = 1.26$  に対して,  $\tilde{d} = 1$ 。Koch curve 上に住んでいる人は, 自分の世界がユークリッド空間にどう埋め込まれているかなどは知る由もなく, 自分の世界はひたすらまっすぐに長く延びている, と思っているわけです。私達にとって親しみやすい正方格子は,

$$\tilde{d} = \bar{d} = d$$

スペクトル次元 フラクタル次元 埋め込むのに必要な空間の次元  
となる, 特殊な例だったのです。正方格子はどんな場合にも一つの  $d$  で済んでいたのですが, フラクタルまで考えに入れると, その式の中で次元が空間のどのような性質を表すかによって, 3 個, 又はそれ以上の互いに同値でない次元に分かれてきます。こうなると, 次元とは何か, 改めて問うてみたくなります。

\* 一般に  $\tilde{d} < 2$  のとき,  $\tilde{d} \leq \bar{d} \leq d$  であることが, 楠岡成雄氏によって示されている ([4])。

以降の章では, "フラクタル上の住人にとっての世界" を知るべく, スペクトル次元にスポットを当てて考えていきます。その重要性にもかかわらず, スペクトル次元に関するやさしい解説書はまだ出ていないようです。

## 2. スペクトル次元を求めてみよう

この章では、例として 2 次元 Sierpinski Gasket のスペクトル次元を求めてみましょう。スペクトル次元を直観的に理解するには前節のような熱拡散のモデルを考えるとよかったです。計算するには random walk で考えると一番楽です。計算の際に、物理でよく使われる ” くりこみ群 ” の方法が威力を発揮します。

### 2-1 フラクタル格子上の random walk

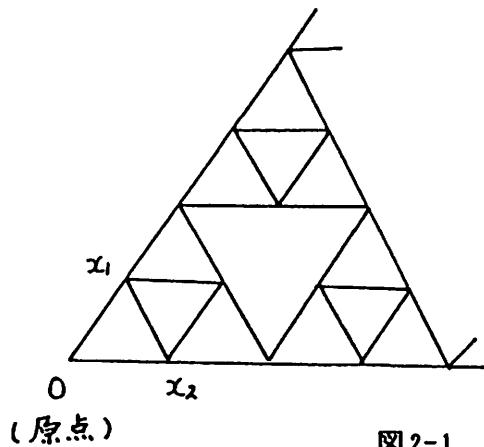


図 2-1

2 次元 Sierpinski Gasket (以後 SG と略) の頂点全体の集合を  $S$ , 時刻は  $0, 1, 2, \dots$  という非負整数値をとるとし,  $S$  上を各時刻に次々と, 隣の点に移動していく random walker (酔っばらいのように行き当たりばったりに進むので, 日本語では ” 酔歩 ” という。)を考えます。random walker (RW) は時刻 0 には原点  $0$  にいて, 隣の点 (長さ 1 の辺で結ばれている点.  $0$  の ” 隣の点 ” は図 2-1 の  $x_1$  と  $x_2$ .) に等確率で移るとし, 元の場所に留まる

確率は 0 とします。即ち,  $x$  にいた RW が次の 1 歩で  $y$  へいく確率 ( $x \rightarrow y$  の遷移確率) を,

$$P_{xy} = \begin{cases} 1/4 & (x, y) \text{ が隣同志, } x \neq 0 \\ 1/2 & (x, y) \text{ が隣同志, } x = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とします。

さて, この RW が  $0$  に戻る平均回数を  $F_0(0)$  とします。

$$F_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n \times [\text{ちょうど } n \text{ 回 } 0 \text{ へ戻る確率}] . \quad (2.1)$$

右辺の和の収束・発散によって ( $0$  に戻る平均回数が有限か無限かによって), その RW の再帰性が判定できます。即ち,

0 に戻る平均回数が RW が  
 無限  $\leftrightarrow$  再帰  
 有限  $\leftrightarrow$  非再帰

RW が再帰であるとは, また  $0$  に戻ってくる確率が 1 であるということ, 非再帰であるとは, 二度と  $0$  に戻ってこない確率が正であるということです。例えば, 1 次元及び 2 次元の正方格子上的 RW は再帰, 3 次元以上では非再帰です。無限に広い樹海をさまよう酔っばらいは, (寿命が十分長ければ) いつか

必ず元の場所に戻ってこられますが、宇宙空間の酔っぱらいは、正の確率で、二度と地球にもどれずのたれ死にします。（RWの再帰性について詳しくは[3]参照）

\* 注. 平均再帰回数はRWの遷移確率を使って次のように表せる。

$$F_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^n$$

但し、 $P_{00}^n = [0$ から出発した random walker が  $n$  歩目で  $0$  にいる確率]

$$= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in S} P_{0x_1} P_{x_1x_2} \dots P_{x_{n-2}x_{n-1}} P_{x_{n-1}0}$$

この各項は初めの  $n$  歩が  $(0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow 0)$  である確率を表す。

”  $n$  歩目で  $0$  にいる ” という事象と, ”  $m$  歩目で  $0$  にいる ” という事象は排反ではない。例えば  $3$  歩目と  $5$  歩目と  $10$  歩目の  $3$  回 (だけ)  $0$  へ戻る場合は  $P_{00}^3$  と  $P_{00}^5$  と  $P_{00}^{10}$  の中に  $3$  重に数えられていて, そこから (2.1) 右辺の  $n$  (この場合  $n = 3$ ) が出てくるので, 上の表式が成り立つ。

## 2-2 スペクトル次元の定義

スペクトル次元はRWが見た空間の広がりを表し,  $F_0(0)$  の収束・発散の仕方に関与しています。それを調べるために, 先ず,  $S$  にもう一点  $\Delta$  (天国) をつけ加え, RWの遷移確率を次のように変えます。  $x, y \neq \Delta$  に対し,

$$P_{xy}(g) = \begin{cases} \frac{1}{4(1+g)} & (x,y) \text{は隣同志, } x \neq 0 \\ \frac{1}{2(1+g)} & (x,y) \text{は隣同志, } x = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$P_{x\Delta}(g) = \frac{g}{1+g}, \quad P_{\Delta x}(g) = 0$$

但し,  $g > 0$ 。

即ち, 各頂点を訪れるたびに, 一定の確率 (この2-SGの場合  $\frac{g}{1+g}$ ) で random walker が死ぬとするわけです。

この新しいRWに対しても同様に,  $0$  に戻る平均回数  $F_0(g)$  ( $g$  の関数) を定義します。このRWは, 既に  $1$  歩目で確率  $\frac{g}{1+g}$  で死んでしまうのですから (いったん天国に行ったら二度と戻れない), 当然非再帰で,

$$F_0(g) < \infty$$

となります。いったんパラメータ  $g$  を入れておいてから、 $F_0(g)$  の  $g \downarrow 0$  ( $g$  を正の側から  $0$  に近づける) の振舞いを調べるのです。ここにスペクトル次元が現れます。

**定義**

負の数  $r$  が存在して、

$$\lim_{g \downarrow 0} \frac{\log F_0(g)}{\log g} = r \quad (2.2)$$

となるとき、スペクトル次元  $\tilde{d}$  を

$$r = \tilde{d}/2 - 1$$

で定義する。

直観的には、 $g \downarrow 0$  で

$$F_0(g) \sim g^r$$

のように振舞えば、

$$\tilde{d} = 2(r + 1)$$

でスペクトル次元が与えられるということです。上の定義では、更に

$$F_0(g) \sim g^r \log g$$

の場合にも、同様に

$$\tilde{d} = 2(r + 1)$$

を得ます。

\* 注1. 2次元正方格子の場合、

$$F_0(g) \sim -\log g$$

のように振舞い、(2.2) 左辺の極限は  $0$  になってしまう。このような場合には、 $F_0(g)$  を1階微分すると、

$$\lim_{g \downarrow 0} \frac{\log(-d/dg) F_0(g)}{\log g} = -1 \quad (2.3)$$

を得て、スペクトル次元は

$$-1 = \tilde{d}/2 - 1 - 1$$

↑

↑

(2.3) 右辺          微分によってべきが1だけ下がった分



より、 $\tilde{d} = 2$  を得る。このように極限が 0 になってしまっても、何度か微分することによって  $\tilde{d}$  が定義できる場合がある（2次元以上の正方格子がその例）。

\* 注2. スペクトル次元の存在は、一般に自明ではない。  
 ((2.2) の極限が存在しない場合には、スペクトル次元も定義できない。)

\* 注3.  $d$ 次元 Sierpinski Gasket, Branched Koch Curve を含むフラクタルのグループ及び正方格子に関しては、上で定義された  $\tilde{d}$  は、第一章の熱拡散で定義された  $\tilde{d}$  と等しいことが証明できる。一般の格子の場合も等しいであろうと予想されているが、証明はなされていない。

### 2-3 Coarse Graining によるくりこみ群

スペクトル次元は、前節で述べたように  $F_0(g)$  の  $g \downarrow 0$  での振舞いから定義されるのですが、正方格子とごく少数の例外を除いて、 $F_0(g)$  の関数形を具体的に求めることは非常に困難です。しかしくりこみ群を使うことによって、 $F_0(g)$  の形を知らなくてもスペクトル次元を求められることがあります。物理では、素粒子論、統計物理などの分野で “くりこみ群 (renormalization group)” という言葉がよく聞かれますが、ひと言で言えば、くりこみ群とはスケール変換のことです。スケール変換を実現する方法にも色々あり、くりこみの仕方は決して一通りではありません。ここでは、coarse graining (粗視化) によるくりこみを行います。この節でやることは、フラクタル格子の自己相似性を利用して、 $F_0(bg)$  ( $b$  は何らかの constant) と  $F_0(g)$  の関係を求め、それによって  $\tilde{d}$  を求めることです。その過程を通してくりこみ群とはどういうものか、わかって頂けるでしょう。

まずRWを粗く見た skeleton walk の定義をしましょう。まず一段階粗いSGの頂点全体の集合を  $S'$  とします。(図2-2の  $o$  で表される点) SGの自己相似性から、 $S$  と  $S'$  の間には

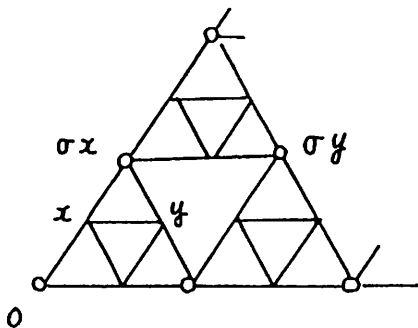


図2-2

$$\overrightarrow{0\sigma x} = 2 \overrightarrow{0x}$$

で定義される 1:1 対応  $\sigma: S \rightarrow S'$  が存在します。(図2-2参照)

さて、 $(0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow \dots)$  という一つのRWの道のりを考えましょう ( $x_i \in S$ ,  $i = 1, 2, \dots$ )。 ( $0, x_1, \dots, x_n, \dots$ )

のうちで  $S'$  に属する点のみ抜き出して通った順に並べ (但し抜き出したとき同じ  $S'$  の点がいくつか隣に並んだときは省略して一度と見なす。図2-3)

$$(0, z_1, \dots, z_m, \dots)$$

とし、改めてこれを時刻  $0, 1, 2, \dots$  で  $0, z_1, \dots, z_m, \dots$  と移っていく  $S'$  上の walk と考え、skeleton walk とよぶことにします。

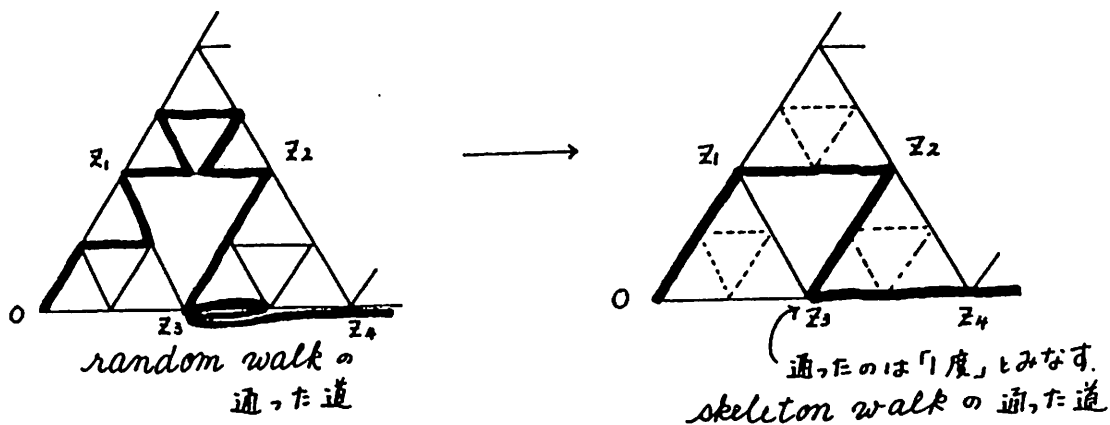


図2-3

skeleton walk の  $x \rightarrow y$  ( $x, y \in S'$ ) の遷移確率を  $P'_{xy}(g)$  とします。  
 $P'_{xy}(g)$  は元の walk の言葉では  $x$  にいた walker が次に訪れる  $x$  以外の  $S'$  の点  $y$  である確率です。図2-4では  $x$  にいた walker が次に訪れる点は  $y_1, y_2, y_3, y_4$  の4つのどれかに限られます。これらを通らずに  $z$  へ行くことはできません。

$y_1, \dots, y_4$  は平等ですから、

$$P'_{xy_1}(g) = P'_{xy_2}(g) = P'_{xy_3}(g) = P'_{xy_4}(g)$$

$$P'_{xz}(g) = 0$$

各構成ブロック ( $F_1$ ) の構造が等しいことから、

$$P'_{zy_2}(g) = P'_{xy_2}(g)$$

等も成り立ちます。これらのことは、skeleton walk はひとまわり大きい  $S'G$  上の (天国つき) random walk (等確率で  $S'$  上の隣の点へ移って行く) になっていることを示しています。

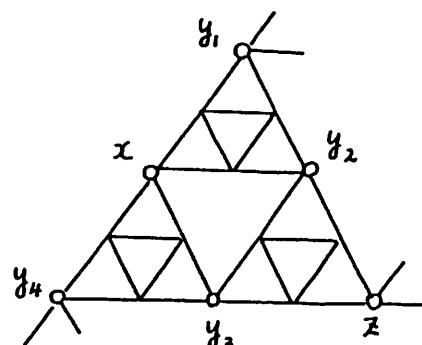


図2-4

$$P_{xy}'(g) = \begin{cases} \frac{1}{4(1+g)} & (x,y) \text{ は } S' \text{ の隣同志, } x \neq 0 \\ \frac{1}{2(1+g)} & (x,y) \text{ は } S' \text{ の隣同志, } x = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (2.4)$$

と書き表すことにより、 $g'$  を定義します。 $g'$  は  $g$  の関数であることに注意して下さい。skeleton walk が 0 に戻る平均回数は、元の walk の  $F_0(g)$  の  $g$  を  $g'$  で置きかえた、 $F_0(g')$  となります。

次に  $g$  と  $g'$  の関係を求めましょう。

$$b(g) = g' / g$$

とおきます。図2-4で  $S$  上の walker が  $x$  から  $y_1$  へ行くには、2歩以上必要とし、1歩毎に確率  $\frac{g}{1+g}$  で死ぬのですから

$$P'_{xy_1} < \frac{1}{4(1+g)}$$

即ち skeleton walker が 1歩進んだときまだ生き残っている確率は元の RW より小さくなります。ところで walker が  $n$  歩行ったときにまだ生き残っている確率は  $g \ll 1$  のとき

$$\left(\frac{1}{1+g}\right)^n \approx \frac{1}{1+ng}$$

これと同じように考えると  $b(g)$  は  $g \ll 1$  で、 $S'$  上のある点にいた RW が  $S'$  上の隣の点に初めて到達するまでの平均歩数になると予想されます。(実際これは正しい。)

さて  $F_0(g)$  は RW が 0 に戻る平均回数でした。skeleton walk も同じ回数 0 に戻るとういいたいところですが、ここで skeleton walk の定義を振り返ってみると、同じ  $S'$  の点を続けて (他の  $S'$  の点を訪れる前に) 訪れたときは 1回と数えていました。そこで 0 にいた RW が、続けて 0 を訪れる平均回数を  $A(g)$  とすると、(初めに 0 にいた分も 1度と数えることにする)

$$A(g)F_0(g') = F_0(g)$$

の関係が得られます。2次元 SG の場合、 $g \downarrow 0$  のとき、

$$b(g) \rightarrow 5,$$

$$A(g) \rightarrow 5/3$$

です (求め方に興味のある人は注2参照)。単純に考えると、 $g = 0$  付近で、

$$\frac{F_0(5g)}{F_0(g)} \approx \frac{3}{5},$$

となるのだから

$$F_0(g) \sim g \log(3/5) / \log 5$$

のように振舞うと思われます。実際このことは正当化できます。

## 補助定理

$$\lim_{g \downarrow 0} \frac{g'}{g} = b$$

$$\lim_{g \downarrow 0} \frac{F_0(g')}{F_0(g)} = \frac{1}{A}, \quad A \neq 1$$

ならば

$$\lim_{g \downarrow 0} \frac{\log F_0(g')}{\log g} = \frac{-\log A}{\log b}$$

であり, このとき, スペクトル次元が存在して,

$$\tilde{\alpha} = \frac{2 |\log b| / A}{|\log b|} \quad (2.5)$$

この補助定理より, SGのスペクトル次元が,

$$\tilde{\alpha} = \frac{2 |\log 3|}{|\log 5|}$$

と求まります.

ここでやったことは, まず SG上のRWを一回り大きなSG上で考え (一段階粗くみる→スケール変換), 次にそのスケール変換の効果をP'に押し込めて (P'は "くりこまれた" 確率) skeleton walkを得ました. 更に (2.4) より, g' (くりこまれた g) が定義されます. 空間的なスケール変換の結果が  $g \rightarrow g'$  の変換の形で表されたこととなります.

\* 注1.  $F_0(g)$  のかわりに,  $F_x(g)$  (べつの  $S'$  の点  $x$  を訪れる平均回数) で考えても変わらないことが証明できる.

\* 注2.

1)  $b(g)$ の求め方

$u \in S$  とし,  $u$  から出発したRWが初めて訪れる  $S'$  の点が  $x$  である確率を  $f_u$  とする (図2-5参照). 出発点も含めて考えるので,

$$f_x = 1, \quad f_y = 0.$$

また,  $f_0 = P_{0x}'(g)$

0 から出発したRWは1歩目でそれぞれ等確率  $\frac{1}{2(1+g)}$  で  $a$  と  $b$  へ行くので

$$f_0 = \frac{1}{2(1+g)} (f_a + f_b)$$

同様にして、 $a$ ,  $b$ ,  $c$  から出発したRWが1歩目でどこへ行くか考えると、

$$f_a = \frac{1}{4(1+g)} (f_o + f_b + f_c + 1)$$

$$f_b = \frac{1}{4(1+g)} (f_o + f_a + f_c)$$

$$f_c = \frac{1}{4(1+g)} (f_a + f_b + 1)$$

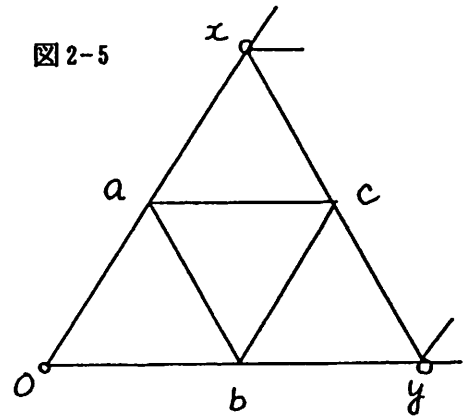
この連立方程式を解くと、

$$f_o = \frac{1}{2(1+g)(4g+1)}$$

(2.4) から

$$b(g) = 5+4g$$

を得る。



## 2) $A(g)$ の求め方

$O$  にいたRWが、他の  $S'$  の点を訪れる前に  $n$  回  $O$  に戻る確率を  $P_n$ , 少なくとも  $n$  回訪れる確率を  $P_{n+}$  とする。確率の好きな人は次の関係を確認してみるとよい。

$$\begin{aligned} A(g) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n P_n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (P_{1+})^n \\ &= \frac{1}{1 - P_{1+}} \end{aligned}$$

$S$  の点  $v$  から出発したRWが最初に訪れる  $S'$  の点が  $O$  である確率を  $h_v$  とすると、(今度は出発点は数えない)

$$P_{1+} = h_o$$

$b(g)$  を求めた時と同様に、 $h_o$ ,  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  の連立方程式を解いて

$$h_o = \frac{2}{(2g+1)(4g+5)}$$

$$A(g) = \frac{(2g+1)(4g+5)}{(2g+3)(4g+1)}$$

を得る。

### 3. $\tilde{d} < 2$ 定理と Coarse Graining の限界

#### 3-1. 10次元図形でも $\tilde{d} < 2$ ?

d次元 Sierpinski Gasket 及び d次元 Branched Koch Curve のスペクトル次元も同様に、その上のRWを定義して Coarse Graining によるくりこみを行うことにより求められます。(Branched Koch Curve のd次元版は、2次元Branched Koch Curve (図1-5) の  $F_1$  で、まん中の正三角形を d-simplex で置き換えたものを  $F_1$  として構成されます(図3-1).)

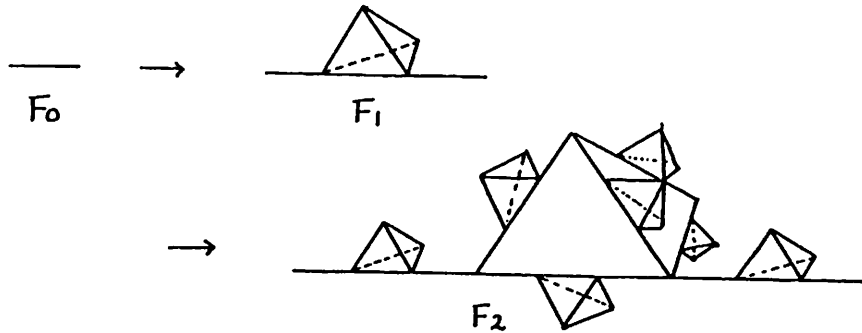


図3-1

これらのフラクタル格子のスペクトル次元とフラクタル次元を並べて示すと、

d次元 Sierpinski Gasket

$$\tilde{d} = \frac{2 \log(d+1)}{\log(d+3)}, \quad \bar{d} = \frac{\log(d+1)}{\log 2} .$$

d次元 Branched Koch Curve

$$\tilde{d} = \frac{2 \log \{ (d^2 + d + 4) / 2 \}}{\log \{ (d + d + 4)(d + 2) / (d + 1) \}}, \quad \bar{d} = \frac{\log \{ (d^2 + d + 4) / 2 \}}{\log 3} .$$

d	S G		Branched Koch Curve	
	$\bar{d}$	$\tilde{d}$	$\bar{d}$	$\tilde{d}$
2	1.58	1.37	1.46	1.24
3	2	1.55	1.89	1.39
4	2.32	1.65	2.26	1.48
5	2.58	1.72	2.58	1.54
6	2.81	1.77	2.85	1.58
7	3	1.81	3.10	1.61

面白いのは、どちらの場合も  $d \rightarrow \infty$  のときフラクタル次元はいくらでも大きくなるのに対して、スペクトル次元は単調増加で2に近づくことです。不思議なことに、10次元 Sierpinski Gasket は10次元の simplex を組み合わせて作られたものですが、その上で熱は2次元以下の空間のような伝わり方をし、random walker は確率1で始点に戻ります。この他にもスペクトル次元の求められているフラクタルはいくつかありますが、正方格子と、特殊な例である Cayley tree (図1-2) を除いて、皆  $\tilde{d} < 2$  なのです。これはどういう訳なのでしょう？  $\tilde{d} \geq 2$  のフラクタルは作れないのでしょうか。それとも偶然  $\tilde{d} < 2$  のものばかり扱っていたのでしょうか。これに関しては一般に次の定理が成り立ちます。

**定理**

Coarse Graining によって、

$$\lim_{g \downarrow 0} \frac{g'}{g} = b$$

$$\lim_{g \downarrow 0} \frac{F_0(g')}{F_0(g)} = \frac{1}{A},$$

のような  $a, b$  が求められたならば、  
 $A > 1$

であり、  
 $\tilde{d} < 2$

$A > 1$  が  $\tilde{d} < 2$  を意味することは、2-3の補助定理によります。Aは  $g=0$  の、0から出発したRWが他の  $S'$  の点を訪れる前に0にいた回数の平均です。初め0にいたのですから、 $A \geq 1$  は明らかです。  $A > 1$  は0を出て  $S'$  の点を通らずに1歩以上歩いて0に戻る道があることを表しています。実際、3次元 Sierpinski Gasket の場合、初めの2歩が図3-2のようであれば0に2度以上いることになりますから、

$$A \geq 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{9}$$

となります。一般の  $d$  次元の場合も同様です。

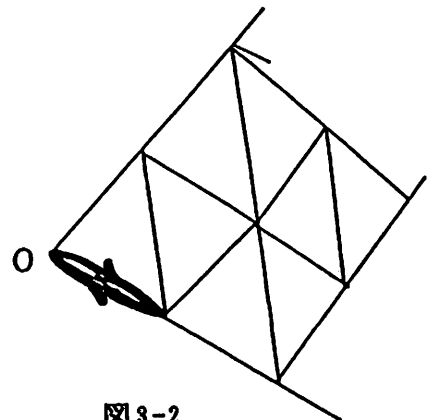


図3-2

スペクトル次元の計算法は今のところ3種類知られています。正方格子は、その並進対称性（格子が周期的に並んでいること。他のフラクタルにはない！）を利用してフーリエ変換で直接  $F_0(g)$  を求めることができます。

Cayley Tree も他の図形には適用できない特殊な方法で  $F_0(g)$  が求まり、 $d = \infty$  を得ます。そしてその他のフラクタルのスペクトル次元が計算された方法は、本質的に皆 Coarse Graining です。上の定理はこのくりこみ法の限界を述べています。

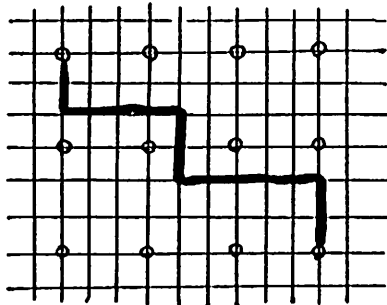
Coarse Graining の方法が使えるのは  $\tilde{d} < 2$  のものに限りますが、Coarse Graining が使えないようなフラクタルは、2以上のスペクトル次元を持ち得ます。 $d \geq 2$  の正方格子がその例です。

### 3-2 $\tilde{d} < 2$ とはどのようなことか

それでは Coarse Graining はどのようなフラクタルに対して有効なのでしょう。SGのスペクトル次元の求め方を振り返ってみると、Coarse Graining がうまくいったのは、単に自己相似性があることだけでなく、skeleton walk が、元の図形と相似な図形上の random walk となること、即ち次の条件を満たす  $S$  の部分集合  $S'$  が取れる、ということが本質的に効いていました。

(\*)  $S$  から  $S'$  への 1:1 対応  $\sigma$  が存在し、 $x, y \in S'$  とする

と  $x$  から  $y$  へ他の  $S'$  の点を通らずに行けるのは、 $\sigma^{-1}x$  と  $\sigma^{-1}y$  が  $S$  上で隣の点であるときであって、その場合に限る。



$o \in S'$  図3-3

このために、skeleton walk が  $S'$  上の random walk になり、遷移確率も(2.4)の形になったのです。これに対し、2次元正方格子の場合、左のように  $S$  と  $S'$  の間に 1:1 対応が存在するように  $S'$  を選ぶことはできません。しかし  $S'$  の任意の2点は、図3-3のように他の  $S'$  の点を通り抜けられない道で結べてしまいます（任意の  $x, y \in S'$  に対し、 $P'_{xy}(g) > 0$  となる）。この場合、 $S'$  をどの

ように選んでも Coarse Graining は使えません。

Coarse Graining が使える例としては、“対称フラクタル”（詳しくは [8] 参照）と呼ぶフラクタルのグループが挙げられます。図3-4 に示したのがその例です。



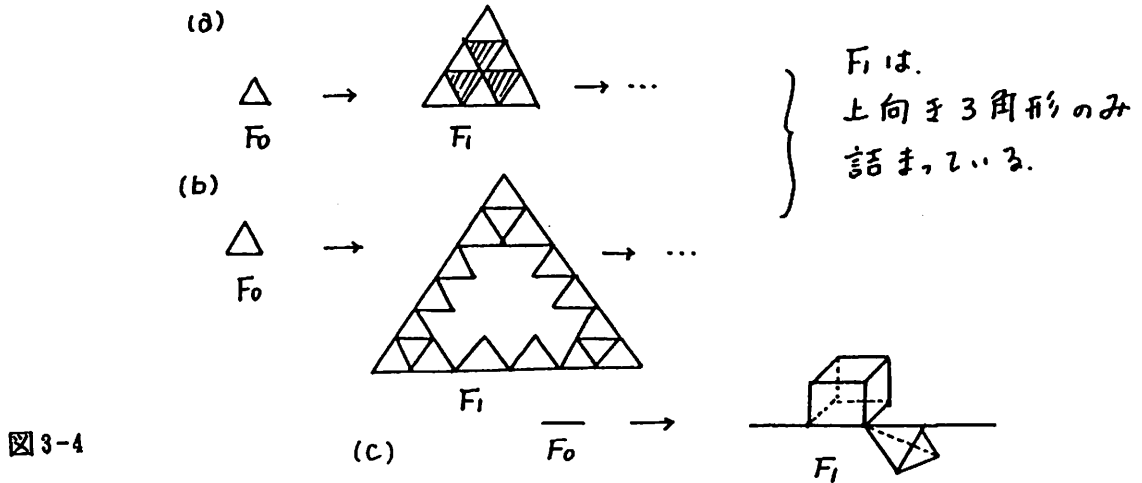


図3-4

さて、Coarse Graining が使えるためには、(\*)を満たす  $S'$  が取れることが必要であることをいま述べたわけですが、次に、このことと  $\alpha < 2$  がどう関係するか、またなぜ上限が2なのかを2次元 Sierpinski Gasket を例にとって直観的にみていきましょう。図3-5のように、0から  $2^n$  の距離の

ところに見張所  $p_n, q_n$  を設けます。

すると  $\Delta O p_n q_n$  から出て更に遠くへ

行くには、必ず  $p_n, q_n$  のどちらかを一旦通らなければなりません。(このことは、(\*)と自己相似性からきています。)

どんなに  $\Delta O p_n q_n$  が大きくても出口は2つしかないので、このことがスペクトル次元と関係しています。

1次元及び2次元正方格子と比較してみましょう。1次元正方格子の場合、0から出て遠くへ行くRWを捕まえる

には、1箇所の見張所で十分です(図3-6)。一方、2次元正方格子は図3-7のように0からの距離に比例する数の見張所が必要です。d次元 Sierpinski Gasket はうまく場所を選べば一定数の見張所で十分、という意味で図3-8に示すような1次元的な構造を持っています。

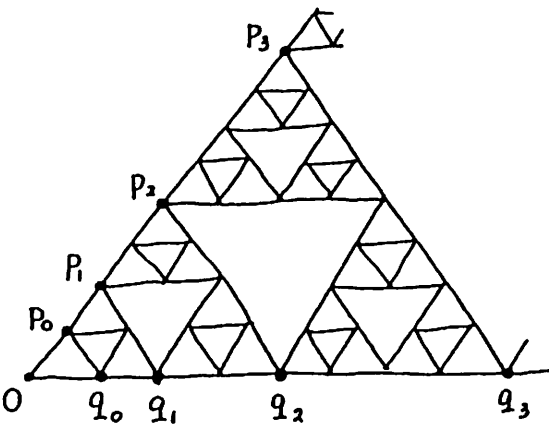


図3-5

には、1箇所の見張所で十分です(図3-6)。一方、2次元正方格子は図3-7のように0からの距離に比例する数の見張所が必要です。d次元 Sierpinski Gasket はうまく場所を選べば一定数の見張所で十分、という意味で図3-8に示すような1次元的な構造を持っています。

$\alpha$  が1より大きくなっているのは、 の部分が1次元正方格子より広がっている分だと考えられます。

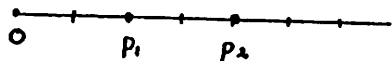


図3-6

図3-7

● は 2x2 の範囲の  
見張所  
△ は 5x5 の範囲の  
見張所

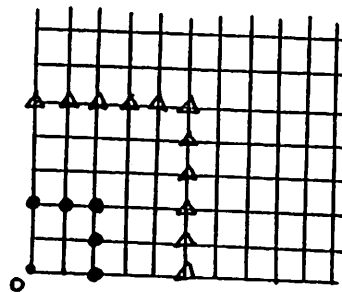
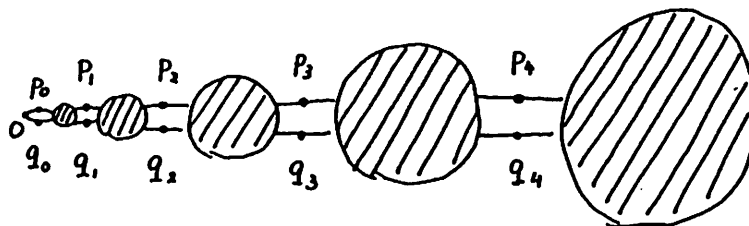


図3-8



このことに関連して、次のような 2次元穴なし Gasket ( 図3-9 ) を調べてみると面白いです ( $F_1$  は4個の  $F_0$  で作られ、その  $F_0$  同志は辺で接しないで頂点だけで接している)。これは Coarse Graining が使える、という性質を壊さないように 2次元 Sierpinski Gasket の穴を埋めてみたもので、フラクタル次元はちょうど2です。スペクトル次元を計算してみると、 $\tilde{\alpha} = 1.5$ 。せっかく穴を埋めても2次元 Sierpinski Gasket の  $\tilde{\alpha} = 1.36$  と比べてあまり増えていません。スペクトル次元に関しては、遠くへ行くほど大きな穴があいていることより、つながり方が問題であることがわかります。

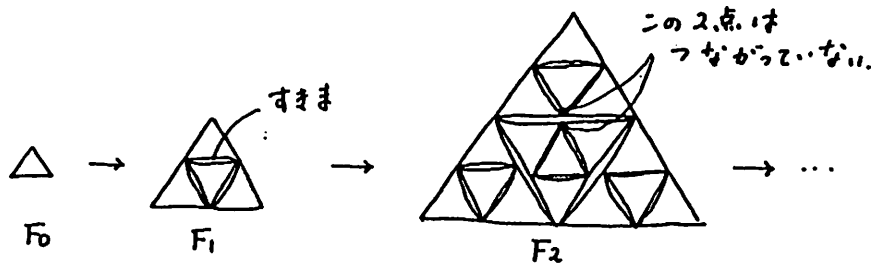


図3-9

穴なし Sierpinski Gasket

### 3-3 Sierpinski Carpetへの挑戦

Sierpinski Carpet は図3-10のように構成されるフラクタルです。よく知られたフラクタルであり、作り方も単純であるにもかかわらず、研究対象としてはなかなか手ごわい相手です。Coarse Grainingが使えないため、スペクトル次元の正確な値は知られていません。しかし自慢の武器が相手に致命傷を与えられないからといって諦めず、何とかして相手に一太刀でもふた太刀でも浴びせたいところです。敵密なくりこみができなければ、近似的なくりこみという手があります。私達はPOP (pattern-on-pattern) 近似と名づけた方法で挑戦してみました。Coarse GrainingはS'という代表点を取って、そこを通るRWに注目しましたが、POPではブロック分けをして (Sierpinski Carpet の場合、各F<sub>1</sub>を一つのブロックとする)、ある意味でブロック毎の平均値に注目します。詳しく述べるととても長くなりますので、興味ある方には[6]及び[9]を参照して頂くことにして、結果だけお知らせしましょう。

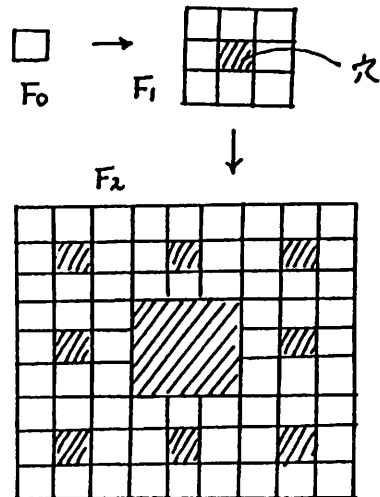


図3-10

2次元SC       $\tilde{\alpha}_{POP} = 1.721$

3次元SC       $\tilde{\alpha}_{POP} = 2.894$

特に3次元Carpetの値は、前述の例外的フラクタル以外で初めて得られた2以上のスペクトル次元として意味があります。

なおPOPの他にもMigdal-Kadanoff近似という方法があって、2-dim Carpetの $\tilde{\alpha}$ の近似値が出されています([5])。

$$\tilde{\alpha}_{MK} = 1.862$$

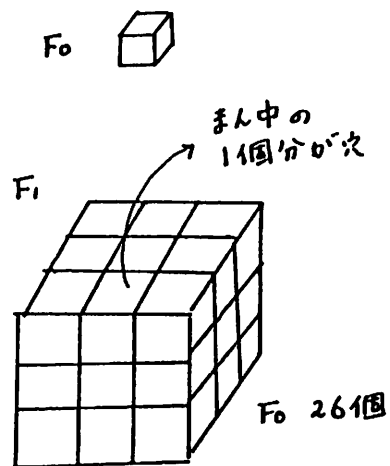


図3-11

このふた太刀が相手にどれほどの深手を負わせたかを調べるのが、今後の課題です。

さらに長田博文氏により、d次元Sierpinski Carpetのスペクトル次元 $\tilde{\alpha}(d)$ は

$$d_i(d) = \log(3^d - 1) / \{ \log(3^d - 1) - \log(3^{d-1} - 1) \}$$

とおくとき、

$$\gamma(d) \geq d_i(d)$$

を満たすことが証明されています（これは厳密な結果）。  
 $d_i(2) = 3/2$ ,  $d_i(3) \approx 2.764$  です。

\* \* \* \* \*

この解説は、1990年夏学期に津田塾大学で行なった講義のノートです。

私達がフラクタルに手を染め始めた頃はスペクトル次元やフラクタル上の現象を研究している人は日本に数人しかいなかったのですが、その後、数年の間に確率論の分野で研究対象として注目され、大きく発展しました。この解説によって少しでもフラクタルに興味を持って下さる方が増えれば嬉しいです。原稿を読んでくれた服部哲弥氏に感謝致します。

#### 文献

フラクタルという言葉は初めて使ったのはマンデルブロー

- [1] B.B.Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature" (Freeman, San Francisco 1982) (日本語訳 "フラクタル幾何学" (広中平祐監訳 日経サイエンス社, 1984))

自然界にあるフラクタルの例について詳しくは

- [2] 高安秀樹 "フラクタル" (朝倉書店, 1986)

ランダム・ウォークについてもっと知りたければ

- [3] S.カーリン, 佐藤健一・佐藤由身子訳 "確率過程講義" (産業図書) フラクタルのスペクトル次元に関するもの

- [4] S.Kusuoka, "A Diffusion Process on a Fractal", 掲載は "Probabilistic Methods in Mathematical Physics", Taniguchi Symp., (Katata and Kyoto 1985), (Kinokuniya-North Holland 1987), 251

- [5] H.Watanabe, "Spectral Dimension of a Wire Network", J.Phys.A: Math.Gen.18 (1985) 2807

- [6] K.Hattori, T.Hattori, H.Watanabe, "New Approximate Renormalization Method on Fractals", Phys.Rev.A 32 (1985) 3730

- [7] K.Hattori, T.Hattori, H.Watanabe, "Reasoning Out the Empirical Rule  $\tilde{d} \approx 2$ ", Phys.Lett.A 115 (1986) 207

- [8] K.Hattori, T.Hattori, H.Watanabe, "Gaussian Field Theories on General Networks and the Spectral Dimensions", Prog. Theor. Phys. Suppl. 92 (1987) 108

- [9] T.Hattori, K.Hattori, "POP Approximation to the Spectral Dimension of Dual Three-Dimensional Sierpinski Carpets", J. Phys. A:Math.Gen.21(1988) 3117

- [10] H.Osada, "Isoperimetric Dimension and Estimates of Heat Kernels of Pre-Sierpinski Carpets", Probability Theory and Related Fields 86 (1990) 469