特別講義

ランダムウォーク，電気回路，そして熱伝導方程式

2021.11.15　服部久美子　　　講義ノート 1121 改訂版

ランダムウォークは基本的な確率モデルで，高校の確率論の問題で見たことがあるかもしれません．ランダムウォークと電気回路は密接な関係にあり，さらに熱の伝導とも関係しています．この不思議な関係をできるだけ易しい説明で見て行きましょう．

0. ランダムウォーク

ランダムウォークとはグラフ（離散化した空間）上で，1 歩ごとに隣の点に移っていく確率過程です．たとえば，2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ を離散化したものは，2 次元の整数格子 $\mathbb{Z}^2 := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ （x, y 座標がともに整数であるような点）です（図 1）．

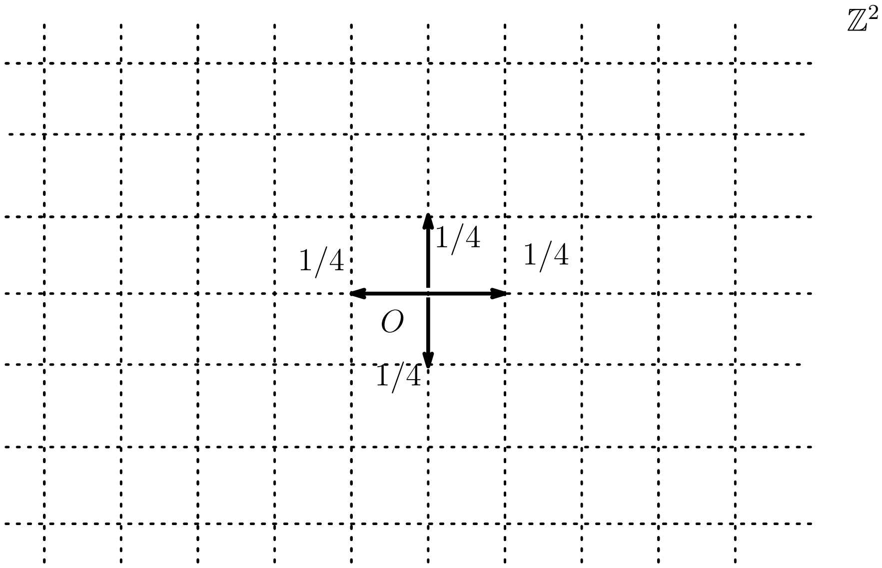

図 1: 2 次元整数格子.

ランダムウォークに関する基本的な問題として次の 3 つがあげられます．

1. ランダムウォークはいつか必ず出発点に戻れるだろうか？
2. ランダムウォークが n 歩進んだとき，出発点から平均的にどのくらい離れているだろうか？
3. ランダムウォークの歩幅を小さくしていった極限で，どのような運動になるだろうか？

このうち，2 は直接計算で求まります．原点を出発点とするランダムウォークの，n 歩目の位置を $X(n)$ とし，原点と $X(n)$ の間の直線距離を $|X(n)|$ と表しましょう．このとき，直

接計算することにより（【考えてみよう】）

$$E[|X(n)|^2] = n$$

であることがわかります.（E は平均値の意味.）　これは空間の次元によりません.（2 乗を取っているのは計算しやすいから.）つまり，ランダムウォークはうろつきながら n 歩でやっと $\sqrt{n}$ くらい遠くへ行きます.

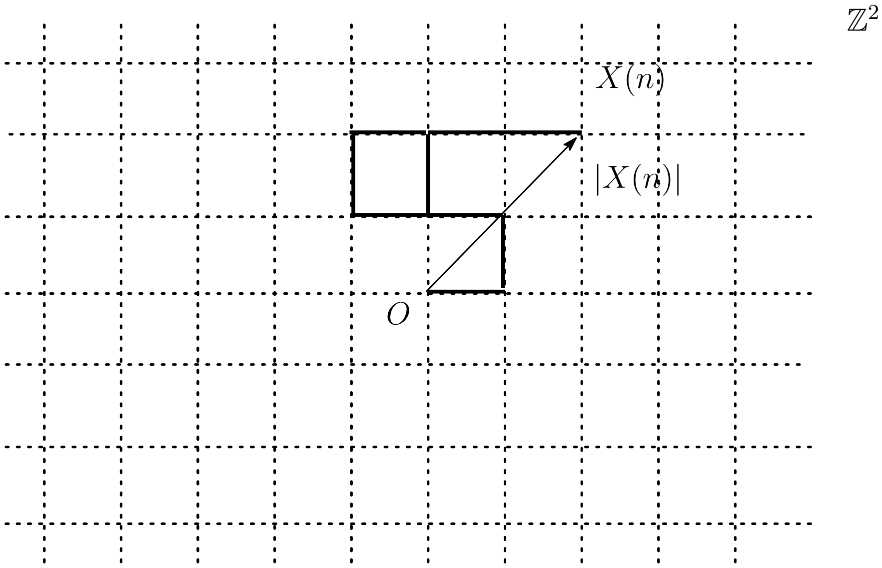

図 2: 出発点からの距離.

今日お話したいのは，1 と 3 です．1 は電気抵抗回路と，3 は熱拡散方程式と深い関係にあります.

1．1 次元の単純ランダムウォークと再帰性の定義

まず，イメージしやすい 1 次元の単純ランダムウォークから始めましょう.

1 次元の単純ランダムウォークとは，$\mathbb{Z}$（整数点）上で，図のように 1 歩毎に隣の点のどちらかに等確率で移る確率過程です．以下，単純ランダムウォークを略して RW と書きます.

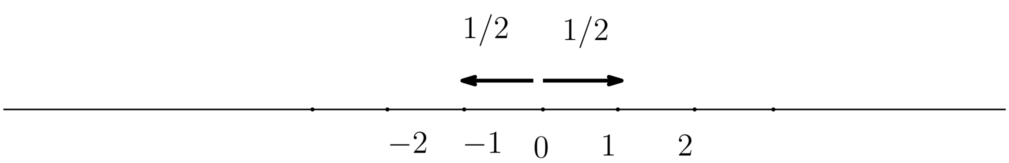

図 3: $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク.

「原点 O から出発したRWがいつか再び O に戻ってくる確率はどれだけか？」という問題を考えましょう．初めて O に戻るまでの歩数を N とします．

$$P[N=1]=0. \quad （1 歩目は必ず 1 か－1 だから）$$

$$P[N=2]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$P[N=3]=0.$$

$$P[N=2n+1]=0, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

$$P[N=4]=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2. \quad （初めて戻るのだから右または左に続けて 2 歩）$$

$$P[N=6]=\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 4.$$

いつかは O に戻る確率は（$N<\infty$ は N が有限な値をとるという意味）

$$P[N<\infty]\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}P[N=n].$$

$1-P[N<\infty]$ は O に戻らずに無限に歩きつづける確率を意味します．

定義

RWが**再帰** (recurrent) であるとは，いつかは必ず出発点に戻ること．すなわち，

$$P[N<\infty]=1.$$

そうでないとき，すなわち，

$$P[N<\infty]<1 \qquad （1 より真に小）$$

のとき，**非再帰** (transient) という．

2．ランダムウォークの遷移確率行列

ここから，一般の連結グラフ $G=(V,E)$ で話を進めます．**グラフ** (graph) は**点** (site, vertex) の集合 V と**辺** (edge) の集合 E でできています．

V を（有限個または可算無限個の）点の集合，E を辺の集合，すなわち，E の要素は順序のない点のペア (x,y)，$x,y\in V$，$x\neq y$,（「順序のない」とは (x,y) と (y,x) は同じものとみなすということ）からなる集合とします．以下，連結なグラフのみ考えます．グラフが**連結** (connected) であるとは，任意の $x,y\in V$ に対して，$(x,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_n,y)$ のような E の要素の列が存在すること，すなわち辺をたどって x から y まで行けることです．

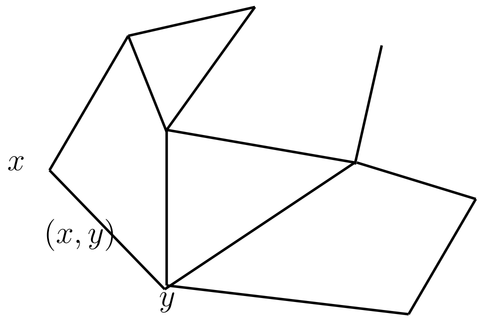

図 4: 連結有限グラフの例.

一般のグラフ $G=(V,E)$ 上の（単純）**ランダムウォーク** (random walk) （以下 RW と略す）を次のように定義します．$X(0),X(1),X(2),\ldots$ をランダムウォークの各歩での位置を表す確率変数列とします．

まず，RW の**遷移確率**を次のように定義します．

$$P[\ X(i+1)=y\ \ |\ X(i)=x\ ]=\begin{cases}\dfrac{1}{\deg\,x}, & (x,y)\in E\\[2em] 0, & (x,y)\notin E.\end{cases}$$

ここで， $\deg\,x$ (degree of x, 点 x の次数）は点 x から出る辺の本数とします．

左辺は条件付確率で,「i 歩目で x にいるとき，次の $i+1$ 歩目で y にいる確率」を表します．右辺は x と直接辺で結ばれた点には等確率で移り，それ以外には移らないことを意味しています．その場にとどまることもありません．こう定義すると，

$$\sum_{y\in V}P[\ X(i+1)=y\ \ |\ X(i)=x\ ]=1$$

をみたします．

例　1 次元の整数格子 $\mathbb{Z}$ を, 点の集合 $V=\mathbb{Z}$，辺の集合 $E=\{(n,n+1)\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$ というグラフとしてみると各 x に対して，$\deg x=2$．一般に，$\mathbb{Z}^d$ を $V=\mathbb{Z}^d$, $E=\{(x,y)\ :\ |x-y|=1\}$ というグラフ (V,E) としてみると，各 x に対して，$\deg\,x=2d$ ですから，

$$P[\ X(i+1)=y\ \ |\ X(i)=x\ ]=\begin{cases}\dfrac{1}{2d}, & (x,y)\in E\\[2em] 0, & (x,y)\notin E.\end{cases}$$

（例ここまで）

また，一般のグラフに戻りましょう．まず，RW の出発点を決めます．V の 1 点を任意に選んでそれを出発点とし，原点 O とよぶことにします．すなわち，

$$P[\ X(0)=O\ ]=1$$

とします．以下，遷移確率を

$$P_{xy} := P[\ X(i+1) = y\ \ |\ X(i) = x\ ]$$

と表します．これは i によらないことに注意してください．定義から

$$\sum_{y \in V} P_{xy} = 1$$

が成り立ちます.

$$\mathbb{P} = (P_{xy})_{x,y \in V}$$

を**遷移確率行列** (transition matrix) といいます.

$$P^n_{xy} := P[\ X(i+n) = y \mid X(i) = x\ ]$$

と書くと（n 歩で x から y へ行く確率），例えば

$$P^2_{xy} = \sum_{z \in V} P_{xz} P_{zy} = \mathbb{P}^2_{xy}$$

のように遷移確率行列で表されます.

$$P^n_{xy} = \sum_{z_1,\dots z_{n-1} \in V} P_{xz_1} P_{z_1 z_2} \cdots P_{z_{n-1} y} = \mathbb{P}^n_{xy}$$

和の中でで 0 でない項はそれぞれ $(x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, y)$ という x から y へ E の辺をたどって行く道に対応する確率を表しています.

集合 $A \subset V$ に対する**到達時刻** (hitting time) T_A, T_A^+ を次のように定義します.（歩数を時刻と考えることも多いので到達「時刻」 とよばれます.）

初めて A に到達する時刻（とりあえず，inf は最小値と思ってください）

$$T_A := \inf\{i \geq 0\ :\ X(i) \in A\ \},$$

時刻 1 以降で（出発点は含めない），初めて A に到達する時刻

$$T_A^+ := \inf\{i > 0\ :\ X(i) \in A\ \}.$$

ここで，

$$\{i \geq 0\ :\ X(i) \in A\ \}, \{i > 0\ :\ X(i) \in A\ \} = \emptyset$$

の場合は,（いつまでたっても A に到達しない！）inf は $+\infty$ とします.（inf は $+\infty$ を値として取れる）特に，A が 1 点集合 $\{x\}$ のときは，T_x, T_x^+ のように書きます.

この記号を用いると，1 ページ目で原点から出発した $\mathbb{Z}$ 上のランダムウォークに対して定義した N は T_O^+ と表され，次のように書けます.

$$P[\ T_O^+ < +\infty\ ] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{再帰 (recurrent)}$$
$$P[\ T_O^+ = +\infty\ ] > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{非再帰 (transient)}$$

さて，$\mathbb{Z}^d$ 上の単純 RW に関しては次のことが知られています．

$d = 1, 2$ ならば再帰．
$d \geq 3$ ならば非再帰．

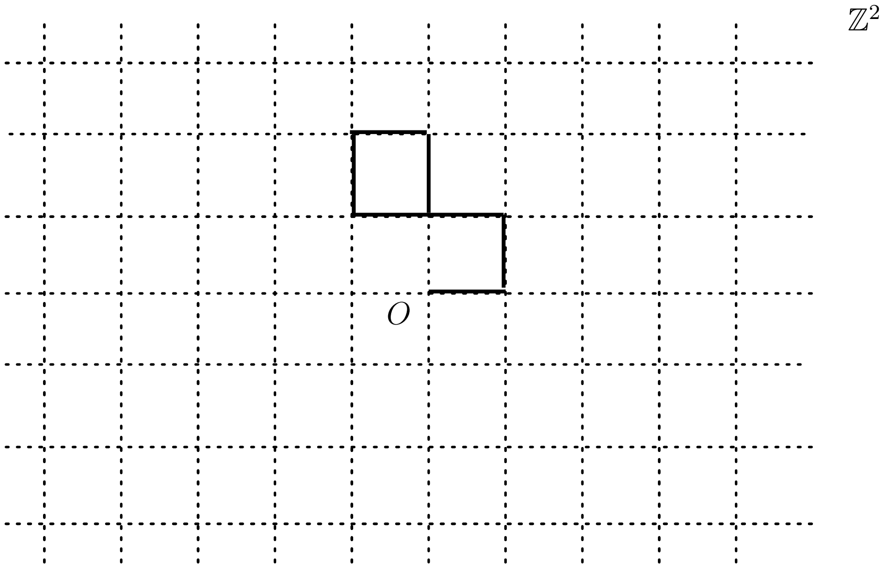

図 5: $\mathbb{Z}^2$ 上の RW の最初の数歩.

この結果が意味することを考えてみましょう．
3 次元のとき，O に再び戻る確率は約 0.34 であることがわかっています．4 次元だとたった 0.19 です．
解釈 : 3 次元以上の空間は，直線，平面より広がりが大きいので，いったん遠くまで行ってしまうと帰って来にくい．
☆ RW は酔っ払いがでたらめに歩く様子にたとえて「酔歩」と訳されることがあります．
酔っ払いのいる地面は 2 次元なのでいつかは必ず家に帰れます．でも,「有限時間内に」というだけですから，$T_O^+ = 100,000$ かもしれないし，$T_O^+ = 10^{20}$ かもしれません．実際，期待値を計算すると $E[T_O^+] = \infty$ です．

宇宙空間で迷子になったら，たとえ寿命が無限に長くても帰れる確率はたった 0.34 です．

3．ランダムウォークの脱出確率と再帰性判定定理

(V, E) は連結有限グラフ，$O \in V$（O は任意に選んで固定），$A \subset V$, $O \notin A$ として前節で定義した次の到達時刻を考えます．

$$T_A := \inf\{i \geq 0 \ : \ X(i) \in A \},$$

$$T_O^+ := \inf\{i > 0 \ : \ X(i) = O \}.$$

$P^O[T_A < T_O^+]$ を RW の**脱出確率**とよびます．（出発点 O に戻る前に，集合 A を訪問する確率．）

★　連結有限グラフでは

$$P[T_A < \infty] = P[T_O^+ < \infty] = 1$$

です．いいかえると，出発点にいつまでたっても戻らない確率，集合 A をいつまでたっても訪問しない確率は共に 0 です。（証明は【考えてみよう】）

このことから，($T_A \neq T_O^+$ なので)

$$P[T_O^+ < T_A] = 1 - P[T_A < T_O^+]$$

がわかります．

以下，2 次元の整数格子 $V = \mathbb{Z}^2$ を例にとって考えます．先に述べたように隣り合った点のみ辺で結び，辺の集合を E とします．これは連結無限グラフです．

以下の図 6 のように，

$$V_n := \mathbb{Z}^2 \cap [-n, n]^2, \qquad \text{（一辺 2n の正方形内および周上の点）}$$

$$E_n := \{\{x, y\} \in E : x, y \in V_n\},$$

$$\partial V_n := \{x \in V_n : \exists y \notin V_n \text{ such that } \{x, y\} \in E\}, \qquad \text{（} V_n \text{ の境界）}$$

図 6 で，∂V_n は太線の正方形の周上の点です．このとき，各 (V_n, E_n) は連結有限グラフで

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots \to V.$$

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \to E.$$

です．

ここで，V_n からの脱出確率を考えると，次の判定定理が導かれます．

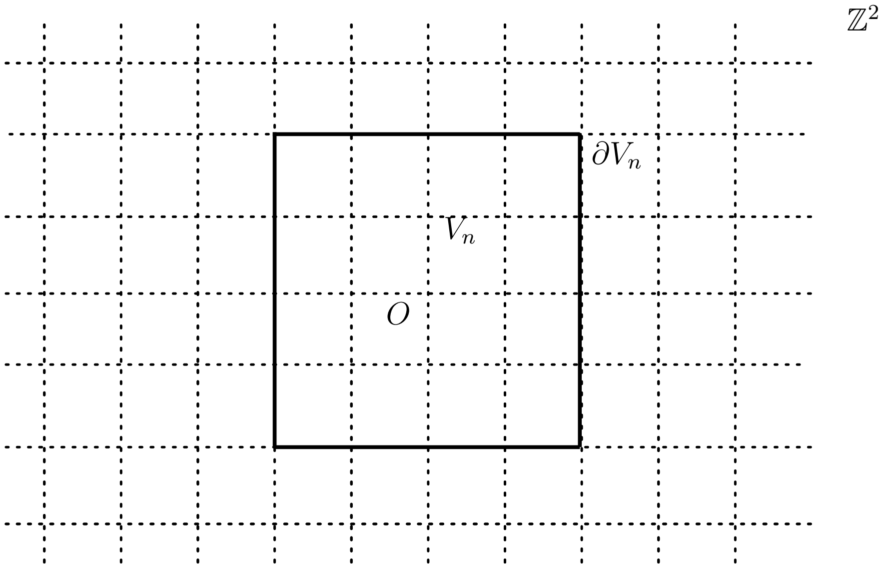

図 6: V_n と その境界 ∂V_n.

定理 1（再帰性の判定定理）

再帰 $\iff$ $\lim_{n\to\infty} P[T_{\partial V_n} < T_O^+] = 0$

証明

$$
\begin{aligned}
P[T_O^+ < +\infty] &= P[T_O^+ < +\infty, \text{どれかの } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } T_{\partial V_n} < +\infty \quad] \\
&= P[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_O^+ < T_{\partial V_n} < +\infty] \quad \text{（どのくらい遠くまで行ってから戻るか）} \\
&= \lim_{n\to\infty} P[T_O^+ < T_{\partial V_n} < +\infty] \quad \text{（確率の単調連続性）} \\
&= \lim_{n\to\infty} P[T_O^+ < T_{\partial V_n}] \quad \text{（} n \text{ を固定するごとに有限グラフで考えているのと同じ）} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1 - P[T_O^+ > T_{\partial V_n}]) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} P[T_O^+ > T_{\partial V_n}]
\end{aligned}
$$

□

確率の単調連続性（確率の基本性質）

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ に対して,

$$P[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = \lim_{n\to\infty} P[A_n]$$

が成り立つ.

4. 脱出確率の満たす方程式

定理 1 は任意の無限連結グラフ (V, E) と

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots \to V.$$

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \to E.$$

をみたす有限連結部分グラフに対して成り立ちます．あとで $\mathbb{Z}^d$ 以外のグラフに適用する予定があるので，しばらく一般のグラフの話をします．

$A \subset V$，出発点は任意に取って固定した点 $O \notin A$ として，脱出確率の満たす方程式を導きます．まず，いくつかの量を定義します．

$x \in V$ に対して，

$$p(x) := P^x[T_A < T_O].$$

ここで，P^x は x から出発した RW に関する確率を表します．すなわち，$p(x)$ は x から出発して O より前に A に到達する確率です．出発点が O なので，もちろん

$$p(O) := P^O[T_A < T_O] = 0.$$

ここで考えているのは T_O であって，T_O^+ ではないことに注意．定義は

$$T_O = \inf\{i \geq 0 \ : \ X(i) = O \ \} = 0$$

でした．

$a \in A$ ならば，0 歩目で A 内にいるので，

$$p(a) := P^a[T_A < T_O] = 1.$$

「一歩進んで考える」

x にいる RW が一歩進むと（辺で結ばれた）隣の点のどれかに移ります.（**「一歩進んで考える！」**）このことから，$x \notin A \cup \{O\}$ のとき，

$$p(x) = \sum_{y \in V} \quad P_{xy} \ P^y[T_A < T_O] = \sum_{y \in V'} \ P_{xy} \ p(y).$$

P_{xy} は第 2 節で定義した遷移確率で x, y が直接辺で結ばれていれば $1/\deg\ x$（$\deg\ x$ は x から出る辺の数），結ばれていなければ 0 です．

$$p(x) = \sum_{y \in V} \ P_{xy} \ p(y).$$

これを命題としてまとめましょう．

命題 2

(1)　$x \notin A \cup \{O\}$ ならば，

$$p(x) = \sum_{y \in V} P_{xy}\ p(y).$$

$$p(a) := P^a[T_A < T_O] = 1, \qquad (a \in A).$$
$$p(O) := P^O[T_A < T_O] = 0.$$

(2)　脱出確率は

$$P^O[T_A < T_O^+] = \sum_{y \in V} P_{Oy}\ p(y).$$

と表せる．

(1) の解 $\{p(x)\}, x \in V$ はただ一組存在します．←これが大事！（証明は【考えてみよう】．）
ちなみに，(1) を少し式変形すると

$$\sum_{y \in V'} P_{xy}\ (p(y) - p(x)) = 0.$$

$$p(O) = 0,\ p(a) = 1, a \in A.$$

この差分方程式は，$D \subset \mathbb{R}^n$（開集合）として，

$$\Delta f(x) = 0, \quad (x \in D),$$

$$f(x) = g(x), \quad (x \in \partial D). \qquad \text{（境界条件）}$$

の離散版です.（【考えてみよう】上の偏微分方程式の解は，存在してもただ一つ.）

この式は，領域 D 内には電荷はなく，D の境界上の電位 $g(x)$ が与えられているときの，D 内部における電位 $f(x)$ を表す式です.

実際，このあと，離散化された空間（電気抵抗網）の上での電位とランダムウォークの確率を関係づけていきます.

5．有限グラフ上の電気回路

有限連結グラフ (V, E) の各辺に抵抗をのせて電気回路を作ります.
$\{c_{xy}\}$, $(x, y \in V)$ を次を満たす数とします.

$$c_{xy} = c_{yx} > 0, \qquad (x, y) \in E,$$

$$c_{xy} = 0, \qquad (x, y) \notin E,$$

各辺 $E = \{x, y\}$ に抵抗 $r_{xy} = c_{xy}^{-1}$ をのせた回路を考えます（c_{xy} はコンダクタンス.）

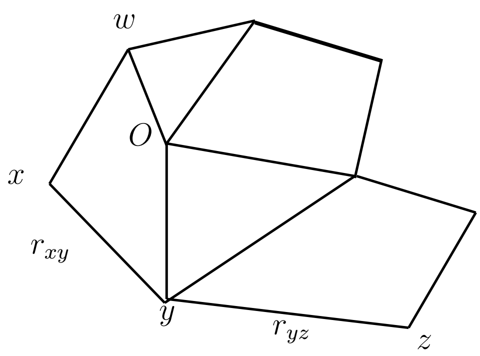

図 7: 有限連結グラフを抵抗回路とみなす

任意に一点を選び O とする．$A \subset V$, $O \notin A$ とし，O を接地し，A を電池につないで 1V の電圧をかけます.

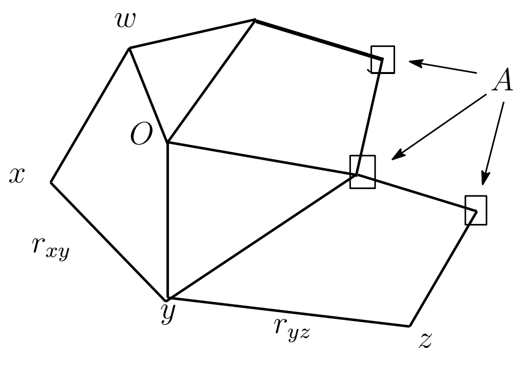

図 8: O を接地，A に電圧をかける

各点 $x \in V$ の電位を v_x と表すと，$v_O = 0$, 各 $a \in A$ に対して $v_a = 1$. また，$(x, y) \in E$ に対して，x から y に流れる電流を i_{xy} とします．$i_{yx} = -i_{xy}$ に注意.

オームの法則

$(x, y) \in E$ に対して，

$$v_x - v_y = r_{xy}\ i_{xy}.$$

キルヒホッフの法則

$x \notin A \cup \{O\}$ に対して，

$$\sum_{y \in V} i_{xy} = 0.$$

$r_{xy} = c_{xy}^{-1}$ より，オームの法則は

$$c_{xy}(v_x - v_y) = i_{xy}.$$

と式変形できて，さらにキルヒホッフの法則より，

$$\sum_{y \in V} c_{xy}(v_x - v_y) = \sum_{y \in V} i_{xy} = 0.$$

$$(\sum_{y \in V} c_{xy}) v_x - \sum_{y \in V} c_{xy} v_y = 0.$$

$c_x := \sum_{y \in V} c_{xy}$ とおくと，

$$v_x = \frac{1}{c_x} \sum_{y \in V} c_{xy} v_y.$$

ここまでのことをまとめておきましょう.

命題 3

有限グラフ (V, E) の各辺にコンダクタンス $0 < c_{xy} < \infty$ をのせてできる電気回路に対して，一点 O を接地（電位 0），$A \subset V$ に 1 ボルトの電圧をかける.（ただし，$O \notin A$）このとき，各点の電位 $\{v_x\}, x \in V$ は次の関係式を満たす.

$$v_x = \sum_{y \in V} \frac{c_{xy}}{c_x}\ v_y, \qquad x \notin A \cup \{O\}.$$

$$v_O = 0, \quad v_a = 1, \quad (a \in A).$$

ここで，$c_{xy}/c_x = P_{xy}$ とおくと,（$\sum_{y \in V} c_{xy}/c_x = 1$ なので遷移確率とみなせる.）

$$v_x = \sum_{y \in V} P_{xy} v_y, \quad (x \notin A \cup \{O\}).$$

$$v_O = 0, \quad v_a = 1, \quad (a \in A).$$

実際，$(x, y) \in E$ に対して，$c_{xy} = 1$ とすれば，$c_x = \deg x$ であり，$c_{xy}/c_x = P_{xy}$ は単純ランダムウォークの推移確率です．

これは，命題 2(1) の $p(x)$ に関する方程式

$$p(x) = \sum_{y \in V'} P_{xy}\ p(y), \quad (x \notin A \cup \{O\}).$$

$$p(a) := P^a[T_A < T_O] = 1, \qquad (a \in A).$$

$$p(O) := P^O[T_A < T_O] = 0.$$

と全く同じ形の式になります．ということは，解も同じということになります．（命題 2 のすぐあとの，解は一つしかないというコメント参照．）

さらに，定義から

$$p(x) = P^x[T_A < T_O]$$

でした．

まとめると，確率が，電気回路の電位で表せて

<u>命題 4</u>

グラフ (V, E) 上の単純ランダムウォークと，グラフの各辺に抵抗 1 をのせた電気回路を考える．電気回路は O を接地（電位 0），$A \subset V$ に 1 ボルトの電圧をかける．（ただし，$O \notin A$）このとき，各点の電位を v_x とすると，

$$v_x = P^x[T_A < T_O].$$

6. 有効抵抗

$O \in V$, $A \subset V$, $O \notin A$ $v_O = 0$, $v_a = 1$, $a \in A$
この回路に A から流入する総電流は

$$i_A := \sum_{a \in A} \sum_{y \in V} i_{ay}.$$

O から流出する総電流は

$$i_O := \sum_{y \in V} i_{yO}.$$

電流は保存しますから（回路に入ってくる電流と出て行く電流は等しい）

$$i_O = i_A.$$

O と A の間の**有効抵抗** $R(O, A)$ を

$$R(O, A) := i_O^{-1}$$

で定義します. $(R = \dfrac{V}{I})$

命題 5

$$P^O[T_A < T_O^+] = \frac{1}{c_O R(O, A)}.$$

ここで，$c_O = \deg O$.

証明

$$\begin{aligned}
R(O, A)^{-1} &= i_O && \text{（定義）} \\
&= \sum_{x \in V} i_{xO} && \text{（O から流出する電流）} \\
&= \sum_{x \in V} C_{Ox}(v_x - v_O) && \text{（オームの法則と $c_{xO} = c_{Ox}$）} \\
&= \sum_{x \in V} C_{Ox} v_x && \text{（ $v_O = 0$）} \\
&= c_O \sum_{x \in V} P_{Ox} v_x && \text{（ $c_{xy} = c_x P_{xy}$）} \\
&= c_O \sum_{x \in V} P_{Ox} P^x[T_A < T_O] && \text{（命題 4）} \\
&= c_O P^O[T_A < T_O^+] && \text{（命題 2(2)）}
\end{aligned}$$

命題 5 と定理 1（$A = \partial V_n$）を合わせると次の命題になります.

命題 6

RW が再帰 $\iff \lim_{n\to\infty} R(O, \partial V_n) = +\infty$.

ランダムウォークの再帰性の話が，有効抵抗の話になりました．

ここで，有効抵抗の収束，発散を判定するのに便利な定理を紹介します．

定理 7 （レイリーの単調性定理）

有限グラフ (V, E) 上の電気回路を 2 つ考える．一つはコンダクタンス $\{c_{xy}\}$, もう一つは $\{c'_{xy}\}$ とする．このとき，各 $\{x, y\} \in E$ に対して，

$$1/c_{xy} \leq 1/c'_{xy}$$

ならば，

$$R(O, A) \leq R'(O, A)$$

である．

系 8

(1) ショート則
電気回路のいくつかの点をショートさせると（ショートさせた点の間の抵抗は 0）有効抵抗は減少する．
(2) カット則
電気回路のいくつかの辺を切ると（切ると抵抗 ∞），有効抵抗は増加する．

7. 例

1. 2 次元整数格子 $\mathbb{Z}^2$

各 n に対して，∂V_n をショートさせる．

それぞれの ∂V_i を 1 点とみなすことになるから，図 10 のような抵抗網と同じになる．(C はコンダクタンス，すなわち．$C = 4$ の部分は 4 本の抵抗が並列に接続されているのと同じこと．)

このグラフの有効抵抗 $R'(O, \partial V_n)$ は，(ショートするとは一部を抵抗 0 にすることだから)，$R'(O, \partial V_n) < R(O, \partial V_n)$ で

$$R'(O, \partial V_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{8k+4} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

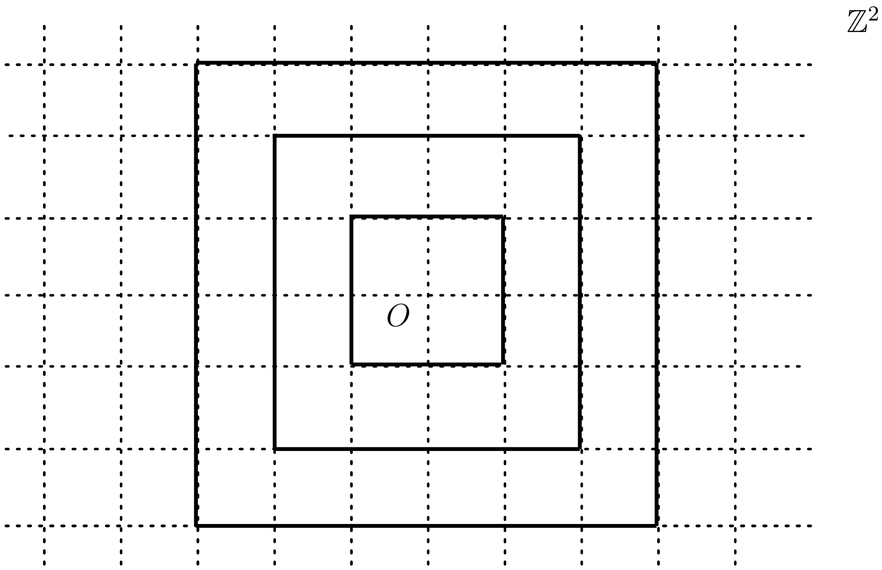

図 9: $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \ldots$.

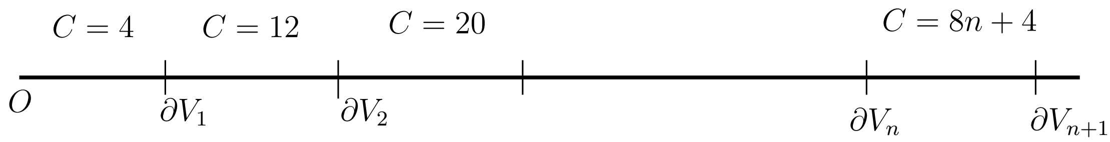

図 10: ショートさせた回路.

ショート側より，有効抵抗 $R(O, \partial V_n)$ は，

$$R(O, \partial V_n) \geq R'(O, \partial V_n) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

より，$\mathbb{Z}^2$ 上のランダムウォークが**再帰**であることがわかります.

2. シェルピンスキー・カーペット（フラクタルグラフの例）

シェルピンスキー・カーペットは，F_0 を図 11 のように 8 個積んで F_1 を作り，F_1 を 8 個積んで F_2 を作り，この操作を無限に繰り返してできるフラクタルグラフです．$\mathbb{Z}^2$ のように一様ではなく，遠くに行くほど大きい穴が開いています.

$\mathbb{Z}^2$ から辺をカットして作られているから，カット則より有効抵抗は大きくなり，**再帰**です.

3. シェルピンスキー・ガスケット（フラクタルグラフの例）

シェルピンスキー・ガスケットは 3 角形を積み上げて作ります．やはり，遠くへ行くほど大きい穴が開いています.
この場合もランダムウォークは**再帰**であることがわかっています.

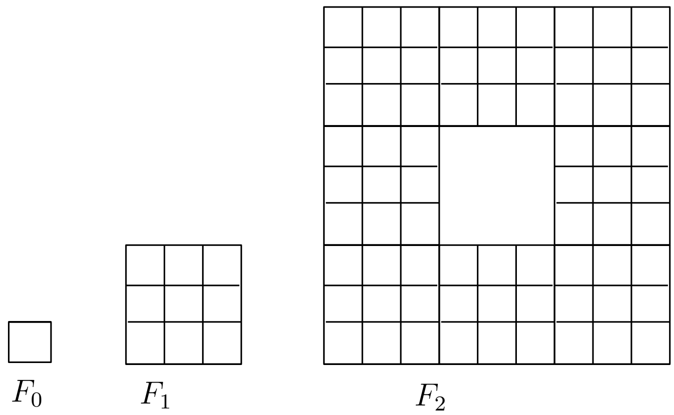

図 11: シェルピンスキー・カーペット・グラフ.

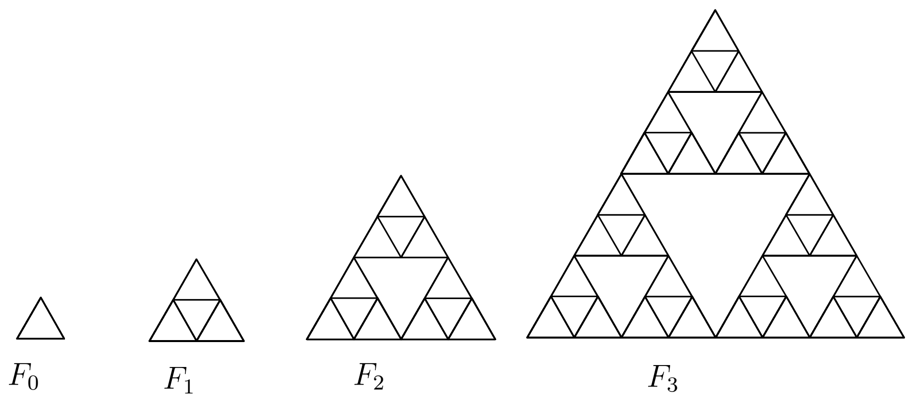

図 12: シェルピンスキー・ガスケット・グラフ.

4. 3 次元シェルピンスキー・ガスケット（フラクタルグラフの例）　別添の図参照

4 面体を組合せて作るので 3 次元空間でないと作れない．再帰だろうか非再帰だろうか？

5. 3 次元整数格子の非再帰性　別添のコピー参照

3 次元整数格子に埋め込めるツリー状のグラフで，大きくしていくとき有効抵抗が有限になるものを作れる！

もっと知りたい人のための参考文献

『確率論』　熊谷隆著　共立出版
『ランダムウォークとくりこみ群』　服部哲弥著　共立出版

8. ランダムウォークの連続極限ーブラウン運動

ここでは $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークの連続極限とは何かを説明します．$\mathbb{Z}^d$ のかわりに一辺の長さを a 倍したグラフ $(a\mathbb{Z})^d$ 上のランダムウォークを考え，$a \to 0$ でどのような確率過程（確率的に決まる運動）になるかを調べます．離散的な空間が連続な空間に近づくので，ランダムウォークの**連続極限**とよびます．

$\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークが時刻 $1, 2, 3, \ldots$ で次々隣の点に移っていくとします．一辺の長さを短くするときに，相変わらず時刻 $1, 2, 3, \ldots$ で次々隣の点に移るとしたのでは，ウォークはだんだん遅くなり，$a \to 0$ の極限で出発点で停止してしまいます．そこで適切な加速（隣に移る時間間隔を短くすること）が必要になります．

$\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークは適切に加速しながら，連続極限をとると，$\mathbb{R}^d$ 上の**ブラウン運動**になります．

$a = 1/2^n$ として $n \to \infty$ の極限を考えることにしましょう．このとき，隣に移るまでの時間間隔を $(1/2^n)^2$ とすると，ランダムウォークは連続な軌跡をもつブラウン運動に収束します．このとき加速のし方はすべての次元 d に共通です．これ以外の時間間隔，例えば，$1/2^n$ にすると，原点にとどまったまま動かなくなり，$(1/2^n)^3$ にすると一瞬で遠くに跳んでいって軌跡が不連続になります．$(1/2^n)^2$ だけが，極限で自明でない連続な確率過程をあたえます．

ブラウン運動の振舞いは厳密にわかっています．

原点から出発した $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動が時刻 t で $A \subset \mathbb{R}^d$ にいる確率は

$$P(t, A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \ \exp(-\frac{|x|^2}{2t}) \ dx_1 \cdots dx_d, \qquad (*)$$

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}.$$

★　ここに現れる $(1/2^n)^2$ の「2 乗」という指数はランダムウォークとブラウン運動を特徴づける指数で，逆数を $\nu = 1/2$ とおくと，原点出発のランダムウォークの n 歩目の位置と原点との直線距離を $|X(n)|$ は

$$E[|X(n)|^2] = (n^\nu)^2$$

すなわち，$|X(n)|$ は平均的に $\sqrt{n}$ くらいまで遠くに行けます．

また，ブラウン運動の軌跡のハウスドルフ次元（フラクタル次元）は，確率 1 で 2，すなわち $1/\nu$ です．

フラクタルの場合も ν の値は異なりますが，同様のことが成り立ちます．(同じ指数が上に述べた 3 つの場面に現れる．)

9. ブラウン運動と偏微分方程式

[1]　熱方程式

$f(x)$ を時刻 0 における温度分布，$u(t,x)$ を時刻 t，位置 $x \in \mathbb{R}^d$ における温度分布とすると，熱拡散方程式は次のように表される.（ラプラシアンの前に 1/2 がついているのは確率論の慣習.）

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
$$u(0,x) = f(x).$$

x から出発したブラウン運動の時刻 t での位置を $B(t)$ とすると，解は

$$u(t,x) = E^x[f(B(t))] = \int_{\mathbf{R}^d} p(t, y-x) f(y) dy$$

で与えられる．ここで，E^x は x 出発のブラウン運動に関する期待値を表す.

$$p(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/2t}$$

は熱拡散方程式の基本解であり，ブラウン運動のことばで言うと，原点出発のブラウン運動の時刻 t での位置の**確率分布密度**（式 (*) の被積分関数）である.

この右辺を

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(t, y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x-y) f(y) dy$$

と書き直すと，時刻 0 で密度 $f(y)$ で各点 y に分布していたブラウン粒子（熱の粒子）のうち時刻 t に x に到達するものを集めてきたというイメージでとらえることができる.

[2]　調和関数

D は有界な開集合とする.

$$\Delta v(x) = 0, \quad \text{in } D,$$

$$v(x) = g(x), \quad \text{on } \partial D.$$

この境界値問題の解は,

$$v(x) = E^x[\ g(B(\tau))\ ].$$

ここで,

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : B(t) \notin D\}.$$

τ はブラウン運動が初めて ∂D に到達する時刻である．$B(\tau)$ はブラウン運動が初めて到達した ∂D の点であり，$B(\tau) \in \partial D$.

調和関数の最大値原理

上の解 v は,（定数関数でなければ）∂D 上の g の値の（重みつき）平均として表せる．よって，最大値は D の内部で取り得ない．∂D 上でとる．

特別講義（１１／１５）レポート課題　（5 点満点）

１.【２～５点】
（全員）講義で面白かった内容，興味をもてなかった内容，わからなかった部分，聞きながら考えたことなど.（今後の参考にさせていただきます．改善のために非常にの参考になる意見には高得点が付きます.）

２.【各２～４点】　次のなかから 1 問以上に答えよ．

(1)　資料 2 ページ : $E[|X(n)|^2] = n$ を示せ.（ヒント：ベクトルで考えよ.）

(2)　資料 7 ページ : 連結な有限グラフでは，A を空集合でない点の集合とするとき，

$$P[T_A < \infty] = P[T_O^+ < \infty] = 1$$

であることを示せ．具体的なグラフを考えて示してもよい.（ヒント :「一歩進んで考える」）

(3)　資料 10 ページ : 差分方程式の解が存在する場合，ただ一つであることを示せ.（ヒント : $\{p(x)\}$, $\{q(x)\}$ を同じ境界条件を満たす解とするとき，$\{p(x) - q(x)\}$ の満たす方程式を考えよう.）

(4)　資料 10 ページ : 偏微分方程式の解が存在する場合，ただ一つであることを示せ.（ヒント：上と同じ.）

(5)　資料 16 ページ : シェルピンスキーガスケット・グラフで，外側の正三角形の，左下の頂点を O，他の 2 頂点のなす集合を A とするとき，F_0, F_1, F_2 の各辺に抵抗 1 をのせたときの有効抵抗 $R(O, A)$ を求めよ.（図 13）このとき， Star-triangle relation（図 14）を用いてよい.

(6)　追加資料 : 3 次元の整数格子の上の RW が非再帰であることを，資料を参考にして，同級生が分かるように丁寧に説明せよ.

(7)　自分で問題を作って，それを解け.

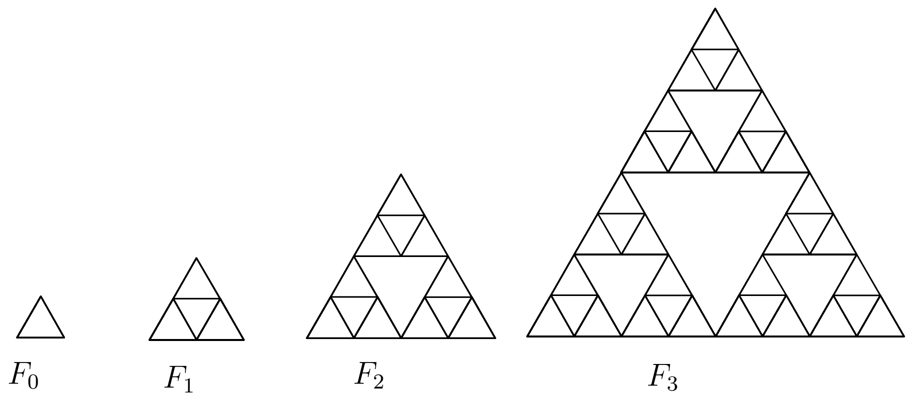

図 13: シェルピンスキー・ガスケット・グラフ.

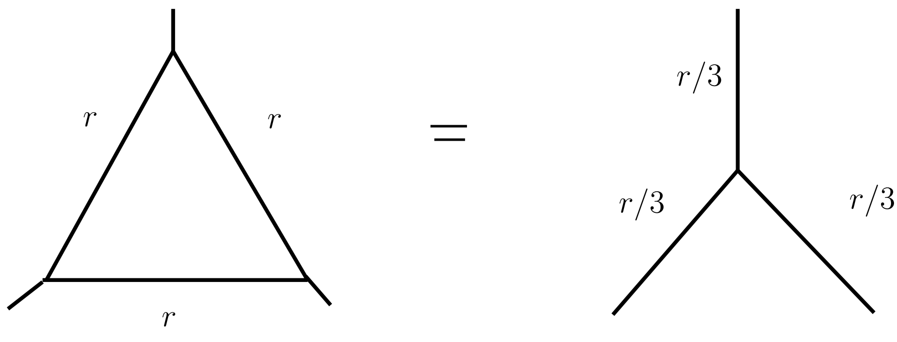

図 14: Star-triangle Relation.